NOTATIONS ET TERMINOLOGIE

Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes, à éléments dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, n étant un entier, $n \geqslant 2$.

On notera :

$A = (a_{ij})$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ (i et j varient de 1 à n);

${}^TA$ la matrice transposée de A;

I la matrice élément neutre pour la multiplication dans $M_n(\mathbb{R})$;

A^{-1} la matrice inverse de A si elle existe.

Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$, on notera X la matrice-colonne associée à x, et ${}^TX$ la matrice-ligne associée à x.

Une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est dite définie positive si et seulement si pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a :

$${}^TXAX \geqslant 0 \quad \text{et} \quad {}^TXAX = 0 \text{ si et seulement si } x = (0, 0, \ldots, 0).$$

QUESTIONS

1° On considère la matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ définie par :

$a_{11} = 1$, et pour $i = 2, 3, \ldots, n$, $a_{ii} = i^2 + 1$ et $a_{i,i-1} = i = a_{i-1,i}$

tous les autres éléments étant nuls.

a. Montrer que la matrice A est symétrique et définie positive.

b. Calculer le déterminant de A.

c. Montrer qu'il existe une matrice R unique de $M_n(\mathbb{R})$, $R = (r_{ij})$, telle que :

R soit une matrice triangulaire inférieure ($r_{ij} = 0$ si $i < j$);

pour i variant de 1 à n, $r_{ii} > 0$;

$A = R \times {}^TR$ (produit des matrices R et ${}^TR$).

Pour cela, on précisera les éléments de R en les calculant par colonnes, d'abord r_{11}, puis pour $j = 2, 3, \ldots, n$, r_{j1}, puis r_{22}, et pour $j = 3, 4, \ldots, n$, r_{j2}, etc., par récurrence sur l'indice i de la colonne.

2° On considère dans l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$, pour tous i et j de l'ensemble 1, 2 ..., n, la matrice E_{ij}, dont tous les éléments sont nuls sauf un, celui situé en i-ième ligne, j-ième colonne, qui vaut 1.

On pose : $$S = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i E_{i+1,i}$$

où pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, α_i est un réel donné.

a. Calculer pour tous i, j, k, l, compris entre 1 et n, $E_{ij} \times E_{kl}$.

b. Calculer S^p pour tout entier p strictement positif.

c. M étant une matrice quelconque de $M_n(\mathbb{R})$, m un entier quelconque strictement supérieur à 1, que vaut :

$$(I - M)(I + M + M^2 + M^3 + \ldots + M^{m-1})\,?$$

d. En déduire que I − S est inversible et déterminer son inverse.

3° *Application numérique.* — Pour $n = 5$, A étant définie comme dans le 1°, on trouve, d'après 1° *c.*,

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit l'équation (E), A X = U,

où X est la matrice-colonne associée à l'inconnue $x = (x_1, x_2, \ldots, x_5)$ de $\mathbb{R}^5$,

U est la matrice-colonne associée à un vecteur $u = (a, b, c, d, e)$ donné de $\mathbb{R}^5$.

Résoudre l'équation (E) par les deux méthodes suivantes :

a. en utilisant la question 1° c'est-à-dire en résolvant $R \times {}^TR \times X = U$, ce qui amène à résoudre le système :

$$\begin{aligned} {}^TR \times X &= Y \\ R \times Y &= U \end{aligned} \qquad \text{(où Y est associée à } y = (y_1, y_2, \ldots, y_5) \text{ de } \mathbb{R}^5)$$

b. en utilisant la question 2°, en posant R = I − S, S étant convenablement choisi, donner R^{-1}, $({}^TR)^{-1}$, puis A^{-1} et résoudre l'équation (E).

REMARQUE : L'équation (E) peut être résolue sans l'aide des questions 1° et 2°, mais cette méthode n'est pas demandée.

4° Pour la matrice A donnée dans 1° déterminer la matrice inverse A^{-1}, c'est-à-dire si $A^{-1} = (b_{r,s})$, pour tous r et s variant entre 1 et n, montrer que :

pour $r \leqslant s$, $$b_{r,s} = \frac{(-1)^{r+s}}{r!\,s!} \sum_{h=s}^{n} (h!)^2.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail